**Белорусский государственный технологический университет**

**Факультет информационных технологий**

**Специальность программная инженерия**

Отчёт по лабораторной работе №5

По дисциплине «Математическое программирование»

На тему «Транспортная задача»

Выполнил:

Студент 2 курса 8 группы

Мамонько Денис Александрович

Преподаватель: асс. Ромыш А.С.

2025, Минск

**Вариант 7**

**Цель работы:** Приобретение навыков решения открытой транспортной задачи

**Задание.** Решить транспортную задачу. Имеется 5 поставщиков продукции и 6 потребителей. Величина запасов, потребностей и стоимость затрат на перевозку продукции взять в соответствии с вариантом (*N*). Оформить отчет.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители Поставщики | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 19 | 9 | 13 | 10 | 18 | 8 | 175 |
| A2 | 17 | 7 | 15 | 12 | 14 | 20 | 120 |
| A3 | 8 | 12 | 18 | 15 | 9 | 18 | 157 |
| A4 | 11 | 17 | 17 | 10 | 20 | 9 | 166 |
| A5 | 10 | 18 | 16 | 7 | 17 | 11 | 107 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

**Ход решения:**

* Проверить, открытая задача или закрытая;
* Составить опорный план;
* Применить метод потенциалов;

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

∑a = 175 + 120 + 157 + 166 + 107 = 725

∑b = 150 + 114 + 138 + 200 + 102 + 170 = 874

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) базу с запасом груза, равным 149 (725—874). Тарифы перевозки единицы груза из базы во все магазины полагаем равны нулю.

Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 19 | 9 | 13 | 10 | 18 | 8 | 175 |
| A2 | 17 | 7 | 15 | 12 | 14 | 20 | 120 |
| A3 | 8 | 12 | 18 | 15 | 9 | 18 | 157 |
| A4 | 11 | 17 | 17 | 10 | 20 | 9 | 166 |
| A5 | 10 | 18 | 16 | 7 | 17 | 11 | 107 |
| A6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 149 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

**Этап I. Поиск первого опорного плана**.

1. Используя *метод наименьшей стоимости*, построим первый опорный план транспортной задачи.

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.

Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Искомый элемент равен c22=7. Для этого элемента запасы равны 120, потребности 114. Поскольку минимальным является 114, то вычитаем его.

x22 = min(120,114) = 114.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 | x | 13 | 10 | 18 | 8 | 175 |
| 17 | **7** | 15 | 12 | 14 | 20 | **120 - 114 = 6** |
| 8 | x | 18 | 15 | 9 | 18 | 157 |
| 11 | x | 17 | 10 | 20 | 9 | 166 |
| 10 | x | 16 | 7 | 17 | 11 | 107 |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 149 |
| 150 | **114 - 114 = 0** | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

Искомый элемент равен c54=7. Для этого элемента запасы равны 107, потребности 200. Поскольку минимальным является 107, то вычитаем его.

x54 = min(107,200) = 107.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 | x | 13 | 10 | 18 | 8 | 175 |
| 17 | 7 | 15 | 12 | 14 | 20 | 6 |
| 8 | x | 18 | 15 | 9 | 18 | 157 |
| 11 | x | 17 | 10 | 20 | 9 | 166 |
| x | x | x | **7** | x | x | **107 - 107 = 0** |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 | 149 |
| 150 | 0 | 138 | **200 - 107 = 93** | 102 | 170 |  |

Искомый элемент равен c16=8. Для этого элемента запасы равны 175, потребности 170. Поскольку минимальным является 170, то вычитаем его.

x16 = min(175,170) = 170.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 19 | x | 13 | 10 | 18 | **8** | **175 - 170 = 5** |
| 17 | 7 | 15 | 12 | 14 | x | 6 |
| 8 | x | 18 | 15 | 9 | x | 157 |
| 11 | x | 17 | 10 | 20 | x | 166 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| 0 | x | 0 | 0 | 0 | x | 149 |
| 150 | 0 | 138 | 93 | 102 | **170 - 170 = 0** |  |

Искомый элемент равен c31=8. Для этого элемента запасы равны 157, потребности 150. Поскольку минимальным является 150, то вычитаем его.

x31 = min(157,150) = 150.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | 13 | 10 | 18 | 8 | 5 |
| x | 7 | 15 | 12 | 14 | x | 6 |
| **8** | x | 18 | 15 | 9 | x | **157 - 150 = 7** |
| x | x | 17 | 10 | 20 | x | 166 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 149 |
| **150 - 150 = 0** | 0 | 138 | 93 | 102 | 0 |  |

Искомый элемент равен c35=9. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 102. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.

x35 = min(7,102) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | 13 | 10 | 18 | 8 | 5 |
| x | 7 | 15 | 12 | 14 | x | 6 |
| 8 | x | x | x | **9** | x | **7 - 7 = 0** |
| x | x | 17 | 10 | 20 | x | 166 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | 138 | 93 | **102 - 7 = 95** | 0 |  |

Искомый элемент равен c14=10. Для этого элемента запасы равны 5, потребности 93. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его.

x14 = min(5,93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | **10** | x | 8 | **5 - 5 = 0** |
| x | 7 | 15 | 12 | 14 | x | 6 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | 10 | 20 | x | 166 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | 0 | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | 138 | **93 - 5 = 88** | 95 | 0 |  |

Искомый элемент равен c44=10. Для этого элемента запасы равны 166, потребности 88. Поскольку минимальным является 88, то вычитаем его.

x44 = min(166,88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | 15 | x | 14 | x | 6 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | **10** | 20 | x | **166 - 88 = 78** |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | 138 | **88 - 88 = 0** | 95 | 0 |  |

Искомый элемент равен c25=14. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 95. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.

x25 = min(6,95) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | x | x | **14** | x | **6 - 6 = 0** |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | 10 | 20 | x | 78 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | 138 | 0 | **95 - 6 = 89** | 0 |  |

Искомый элемент равен c43=17. Для этого элемента запасы равны 78, потребности 138. Поскольку минимальным является 78, то вычитаем его.

x43 = min(78,138) = 78.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | x | x | 14 | x | 0 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | **17** | 10 | x | x | **78 - 78 = 0** |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | 0 | x | 149 |
| 0 | 0 | **138 - 78 = 60** | 0 | 89 | 0 |  |

Искомый элемент равен c63=0. Для этого элемента запасы равны 149, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

x63 = min(149,60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | x | x | 14 | x | 0 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | 10 | x | x | 0 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | **0** | x | 0 | x | **149 - 60 = 89** |
| 0 | 0 | **60 - 60 = 0** | 0 | 89 | 0 |  |

Искомый элемент равен c65=0. Для этого элемента запасы равны 89, потребности 89. Поскольку минимальным является 89, то вычитаем его.

x65 = min(89,89) = 89.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x | x | 10 | x | 8 | 0 |
| x | 7 | x | x | 14 | x | 0 |
| 8 | x | x | x | 9 | x | 0 |
| x | x | 17 | 10 | x | x | 0 |
| x | x | x | 7 | x | x | 0 |
| x | x | 0 | x | **0** | x | **89 - 89 = 0** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | **89 - 89 = 0** | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители Поставщики | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] | 175 |
| A2 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 | 120 |
| A3 | 8[150] | 12 | 18 | 15 | 9[7] | 18 | 157 |
| A4 | 11 | 17 | 17[78] | 10[88] | 20 | 9 | 166 |
| A5 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 | 107 |
| A6 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[89] | 0 | 149 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 11, а должно быть m + n - 1 = 11. Следовательно, опорный план является *невырожденным*.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F(x) = 10∙5 + 8∙170 + 7∙114 + 14∙6 + 8∙150 + 9∙7 + 17∙78 + 10∙88 + 7∙107 + 0∙60 + 0∙89 = 6510

**Этап II. Улучшение опорного плана**.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 10; 0 + v4 = 10; v4 = 10

u4 + v4 = 10; 10 + u4 = 10; u4 = 0

u4 + v3 = 17; 0 + v3 = 17; v3 = 17

u6 + v3 = 0; 17 + u6 = 0; u6 = -17

u6 + v5 = 0; -17 + v5 = 0; v5 = 17

u2 + v5 = 14; 17 + u2 = 14; u2 = -3

u2 + v2 = 7; -3 + v2 = 7; v2 = 10

u3 + v5 = 9; 17 + u3 = 9; u3 = -8

u3 + v1 = 8; -8 + v1 = 8; v1 = 16

u5 + v4 = 7; 10 + u5 = 7; u5 = -3

u1 + v6 = 8; 0 + v6 = 8; v6 = 8

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=16 | v2=10 | v3=17 | v4=10 | v5=17 | v6=8 |
| u1=0 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] |
| u2=-3 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 |
| u3=-8 | 8[150] | 12 | 18 | 15 | 9[7] | 18 |
| u4=0 | 11 | 17 | 17[78] | 10[88] | 20 | 9 |
| u5=-3 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 |
| u6=-17 | 0 | 0 | 0[60] | 0 | 0[89] | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij

(1;2): 0 + 10 > 9; ∆12 = 0 + 10 - 9 = 1 > 0

(1;3): 0 + 17 > 13; ∆13 = 0 + 17 - 13 = 4 > 0

(4;1): 0 + 16 > 11; ∆41 = 0 + 16 - 11 = 5 > 0

(5;1): -3 + 16 > 10; ∆51 = -3 + 16 - 10 = 3 > 0

max(1,4,5,3) = 5

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;1): 11

Для этого в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители Поставщики | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Запасы |
| 1 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] | 175 |
| 2 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 | 120 |
| 3 | 8[150][-] | 12 | 18 | 15 | 9[7][+] | 18 | 157 |
| 4 | 11[+] | 17 | 17[78][-] | 10[88] | 20 | 9 | 166 |
| 5 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 | 107 |
| 6 | 0 | 0 | 0[60][+] | 0 | 0[89][-] | 0 | 149 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

Цикл приведен в таблице (4,1 → 4,3 → 6,3 → 6,5 → 3,5 → 3,1).

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 78. Прибавляем 78 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 78 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители Поставщики | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
| A1 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] | 175 |
| A2 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 | 120 |
| A3 | 8[72] | 12 | 18 | 15 | 9[85] | 18 | 157 |
| A4 | 11[78] | 17 | 17 | 10[88] | 20 | 9 | 166 |
| A5 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 | 107 |
| A6 | 0 | 0 | 0[138] | 0 | 0[11] | 0 | 149 |
| Потребности | 150 | 114 | 138 | 200 | 102 | 170 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 10; 0 + v4 = 10; v4 = 10

u4 + v4 = 10; 10 + u4 = 10; u4 = 0

u4 + v1 = 11; 0 + v1 = 11; v1 = 11

u3 + v1 = 8; 11 + u3 = 8; u3 = -3

u3 + v5 = 9; -3 + v5 = 9; v5 = 12

u2 + v5 = 14; 12 + u2 = 14; u2 = 2

u2 + v2 = 7; 2 + v2 = 7; v2 = 5

u6 + v5 = 0; 12 + u6 = 0; u6 = -12

u6 + v3 = 0; -12 + v3 = 0; v3 = 12

u5 + v4 = 7; 10 + u5 = 7; u5 = -3

u1 + v6 = 8; 0 + v6 = 8; v6 = 8

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=11 | v2=5 | v3=12 | v4=10 | v5=12 | v6=8 |
| u1=0 | 19 | 9 | 13 | 10[5] | 18 | 8[170] |
| u2=2 | 17 | 7[114] | 15 | 12 | 14[6] | 20 |
| u3=-3 | 8[72] | 12 | 18 | 15 | 9[85] | 18 |
| u4=0 | 11[78] | 17 | 17 | 10[88] | 20 | 9 |
| u5=-3 | 10 | 18 | 16 | 7[107] | 17 | 11 |
| u6=-12 | 0 | 0 | 0[138] | 0 | 0[11] | 0 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.

Минимальные затраты составят: F(x) = 10∙5 + 8∙170 + 7∙114 + 14∙6 + 8∙72 + 9∙85 + 11∙78 + 10∙88 + 7∙107 + 0∙138 + 0∙11 = 6120

**Вывод:** Оба метода имеют свои области применения. Метод наименьшей стоимости удобен для быстрого получения начального плана, а метод потенциалов обеспечивает точное нахождение оптимального решения. В практических задачах часто используется комбинация этих методов: сначала строится начальный план методом наименьшей стоимости, а затем он оптимизируется с помощью метода потенциалов. Такой подход позволяет эффективно решать транспортные задачи с минимальными затратами времени и ресурсов.